

文章编号: 1000-7598 (2011) 07-2153-04

基于拉丁方抽样及 K-S 检验的边坡可靠性分析

马建全¹, 李广杰¹, 徐佩华^{1,2}, 张 文¹, 孟凡奇¹

(1. 吉林大学 建设工程学院, 长春 130026; 2. 成都理工大学 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室, 成都 610059)

摘 要: 边坡稳定性是受复杂因素影响下的多维非线性问题, 大多数边坡工程都存在着不确定性。大量试验和工程实践证明, 影响边坡状态的因素中有许多具有显著的随机性, 参数具有变异性。从概率的角度出发, 结合实际工程, 对于原始数据采用 K-S 检验法进行假设验证, 确定参数变量的分布类型, 克服了人为假设的误差, 并分别采用 Latin 方抽样(LHS)法和 Monte Carlo 法对参数进行抽样, 得到状态函数值, 确定安全系数及可靠指标, 对比两种抽样方法, 基于 LHS 法模拟次数要少于 Monte Carlo 法, 而且破坏概率的收敛性也优于 Monte Carlo 法, 明显节省了计算时间。

关 键 词: 边坡; Latin 方抽样; K-S 检验; 可靠性分析

中图分类号: TB 114

文献标识码: A

Reliability analysis of slope with Latin hypercube sampling and K-S test

MA Jian-quan¹, LI Guang-jie¹, XU Pei-hua^{1,2}, ZHANG Wen¹, MENG Fan-qi¹

(1. College of Construction Engineering, Jilin University, Changchun 130026, China;

2. State Key Laboratory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: Slope stability is the multi-dimensional nonlinear problem which is influenced by complex factors. There is uncertainty in most of slope engineering. A large number of test and engineering practice have proved that the factors affecting slope state have significant randomness and parameters have variability. So we can use Kolmogorov-Smirnov test (K-S test) for the raw data to determine the distribution type of parametric variation from the perspective of probability and practical engineering. It will overcome artificial assumption. And sample the parameters to obtain state function and determine the safety factor and reliability index using Latin hypercube sampling (LHS) method and Monte Carlo method, respectively. Comparison of two sampling methods, the number of simulation based on LHS is less than the Monte Carlo method. Also the convergence of failure probability curve with LHS is better than the Monte Carlo method.

Key words: slope; Latin hypercube sampling; K-S test; reliability analysis

1 引 言

边坡工程具有很强的综合性和不确定性, 从这个意义上讲, 更适合用可靠性理论和方法来研究和解决实际边坡工程的问题^[1-2]。目前, 边坡可靠性分析中最常用的方法主要有概率矩点估计法、一次二阶矩方法、Monte Carlo 法、响应面法等^[3-4]。

边坡稳定性是一个多维因素影响下的非线性问题, 传统边坡稳定性可靠性分析方法是建立在假设参数变量属于某一分布的基础上进行分析的, 且大多假设为参数变量服从正态分布, 但实际的变量并不一定服从正态分布, 这就人为地使数据及计算结

果产生与实际不相符的误差, 为此, 本文采用 K-S 检验法对数据进行假设检验, 确定参数变量服从的分布形态, 使抽样有合理的理论支持。

在采用直接 Monte Carlo (简称 M-C 法) 法处理边坡稳定性问题时, 要得到高精度的估算结果必须保证有足够多的样本, 且这种方法具有抽样及收敛速度慢、计算量大等缺点^[5], 故本文中采用 Latin 方抽样 (LHS) 方法对参数变量进行抽样, 此方法是一种有效而实用的受约束小样本采样技术的可靠性分析方法。从工程的角度看, M-C 法抽样中有许多模拟循环实际上是相同的, 因此, 在考虑参数的工程意义和随机性质的前提下, 从参数的不确定性

收稿日期: 2009-11-20

基金项目: 四川省交通厅重点项目 (No. 2006A24-612); 国家博士后基金 (No. 20070411147)。

第一作者简介: 马建全, 男, 1983 年生, 博士研究生, 主要从事工程地质及地质灾害防治工程方面的研究工作。E-mail: mjq240301@163.com

范围中选取参数值, LHS 方法技术提供了这样一个小样本的约束采样方案, 其样本无疑可以显著减小, 它比直接 MC 法有效^[6]。

2 K-S 检验法

假设检验包括科尔莫洛夫-谢苗洛娃 (Kolmogorov-Smirnor) 检验法 (简称 K-S 检验法) 及卡方检验法, 其中 K-S 检验法适用于样本容量较少的情形, 由于现场大型原位试验费用比较昂贵, 取得的样本数量相对较少, K-S 检验法对于小样本来说, 不用数据分组, 使用方便, 不损失数据中的信息, 是一种有效的方法^[1]。

K-S 检验法的基本思想是: 将样本观测值的累积频率 ($F_n(x)$) 与假设的理论概论分布 ($F_X(x)$) 相比较来建立统计量。

设样本容量为 n , 按经验分布函数的建立方法, 采用下式求得分段累积频率:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{i}{n}, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1, & x \geq x_n \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为排列后的样本数据; $F_n(x)$ 为阶梯形曲线。

在随机变量 X 的全部范围内, $F_n(x)$ 与 $F_X(x)$ 之间的最大差异为

$$D_n = \max_{-\infty < x < +\infty} |F_X(x) - F_n(x)| < D_n^\alpha \quad (2)$$

式中: D_n 为一个随机变量, 其分布依赖于 n ; D_n^α 为显著水平 α 上的临界值。可认为在显著水平 α 上拟采用的分布是不能抗拒的, 否则应予拒绝。

3 LHS 方法的基本原理

LHS 方法是由 McKay 等于 1979 年提出的^[7], Ronald 等^[8]在 1981 年进行了深入的阐述, 详细地计算代码和手册在随后就发表了^[9], 它是一种多维分层抽样方法。它提供了一种令人满意的选择输入变量的方法, 能得到输入变量均值、方差和分布函数的良好估计, 从而满足预期分析的需要, 与 M-C 法相比, LHS 方法对均值和方差的估计在效果上有显著改善。下面是 LHS 方法的过程^[9-10]。

(1) 首先确定模拟次数 N , 然后将变量的概率分布函数等分成 N 个互不重叠的子区间, 如图 1 所示。

(2) 在每个子区间内分别进行独立的等概率抽样, 这可以避免 M-C 法大量反复的抽样工作。对于 N 个区间, M 个变量的 Latin 方抽样的最大组合数

可以由公式: $\prod_{i=1}^M (N-i)^{M-1}$ 进行计算, 例如, 一个有 2 个变量、4 个互不重叠的子区间, 则会有 576 个可能的组合。

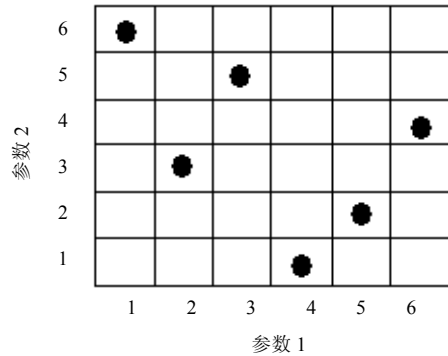


图 1 Latin 方
Fig.1 Latin hypercube

(3) 为了保证抽取的随机数属于各子区间, 第 i 个子区间内的随机数 X 应满足下式:

$$X_i = \frac{X}{N} + \frac{i-1}{N}, \quad \frac{i-1}{N} < X_i < \frac{i}{N} \quad (3)$$

式中: $i=1, 2, \dots, N$; X 为 $[0, 1]$ 区间内均匀分布的随机数; X_i 为第 i 个子区间的随机数。

(4) 每一个子区间仅产生一个随机数, 然后采用反变换法, 由 N 个子区间产生的随机数得到 N 个某一概率密度函数的随机变量抽样值, 最后对随机变量的抽样值进行组合, 也就是对各随机变量的抽样值所属区间的序号进行随机排列。图 2 为正态变量的 LHS 分层抽样示意图。

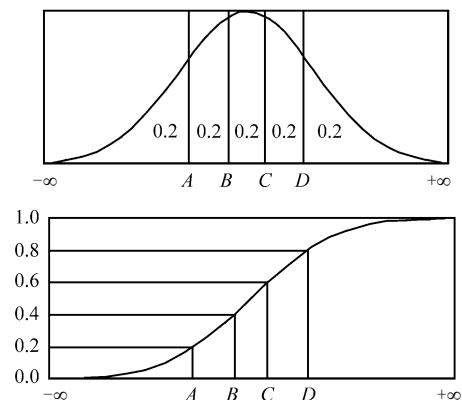


图 2 正态变量的 LHS 抽样 (5 层)
Fig.2 Latin hypercube sampling of normal variable (five divisions)

4 方法介绍

边坡状态受到许多因素或变量的控制, 如土体的强度、孔隙水压力、地震等等, 而且这些变量具

有不确定性,可以用这些随机变量来构造函数模型,用于描述边坡状态: $Z = g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 函数 $g(x)$ 反映边坡的状态或性能,称为状态函数或安全系数, x 称为基本状态变量。本文算例中安全系数的计算采用简化 Bishop 法,因此,状态函数为

$$F_s = \frac{\sum \frac{1}{m_{ai}} [c_i b_i + (W_i - u_i b_i) \tan \varphi_i]}{\sum W_i \sin \alpha_i + \sum Q_i \frac{e_i}{R}} \quad (4)$$

$$m_{ai} = \cos \alpha_i + \frac{\tan \varphi_i \sin \alpha_i}{F_s} \quad (5)$$

式中: F_s 为安全系数; W_i 为作用在条块 i 的重力; Q_i 为地震惯性力; R 为圆弧半径; e_i 为土条重心到力矩中心的垂直距离; α_i 为条块底面中点的切线与水平的夹角; b_i 为土条宽度; u_i 为孔隙水压力; c_i 为内聚力; φ_i 为摩擦角。

使用 K-S 检验确定各变量所服从的最佳分布类型。确定模拟次数,根据所确定的各个输入变量 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的最佳分布类型和参数,将各个变量的概率分布函数等分成 N 个互不重叠的子区间,在每个子区间内分别进行独立的等概率抽样,之后对各个随机变量的抽样值进行组合,由建立的状态函数计算 N 个安全系数,拟合并检验概率分布,估计其均值 μ_z 和标准差 σ_z ,统计安全系数 $Z \leq 1$ 的样本数,计算可靠指标 β 和破坏概率 p_f 。

5 工程实例

5.1 工程概况

雅安—石棉—泸沽高速公路是国家高速公路网 7 条首都放射线中北京—昆明的一段,同时亦是西部大通道甘肃(兰州)—云南(磨憨)公路的重要组成部分。雅泸高速公路设计里程桩号 K112+908.16~K113+675 地段位于大渡河右岸,在瀑布沟电站瀑布沟水库库区里。在公路施工阶段,大渡河的河水位在 840.85 m;在下游瀑布沟水电站运行期间,水库正常蓄水位为 851.50 m,部分填石路基的下部路基将浸泡在库水中。区内为 VIII 度抗震设防区,在地震作用下电站运行期间,下部填石

路基边坡稳定状态将影响公路的安全和运营,因此,对该路基边坡进行了可靠性分析。

5.2 模型建立

该计算断面为四川省雅安经石棉至泸沽高速公路 C14-1 合同段 K113+500~K113+675 段填方路基的典型横断面,如图 3 所示。下边界:取钻孔孔深为 15 m,标高为 827.35 m;左边界:下部路基最左端,标高为 852.25 m;右边界:距河岸为 20 m。

5.3 参数的选取及 K-S 检验

如图 3 所示,其地层可分为 3 层,还有一个防冲挡墙,有关参数如表 1 所示,其中强度参数 c_i 、 φ_i 、 γ_i ($i=1, 2, 3$) 是相互独立的随机变量,在显著水平 $\alpha=0.05$ 下用 K-S 法对原始数据进行了 7 种常见分布(对数正态分布、正态分布、均匀分布、三角形分布、指数分布、 γ 分布和 β 分布)进行假设检验,得出各土层参数的最大 D_n ,与显著水平 0.05 上的临界值 $D_n^{0.05}$ 进行对比,确定最佳服从分布类型,检验结果如表 2 所示。

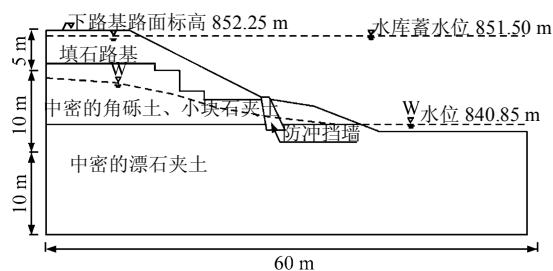


图 3 边坡剖面图

Fig.3 Cross-section of the slope

表 1 边坡计算参数的均值和变异系数
Table 1 The mean and coefficient of variation of slope parameters

序号	地层及防护	样本数 n /个	黏聚力		摩擦角		重度	
			均值 /kPa	变异系数 δ	均值 /($^\circ$)	变异系数 δ	均值 /(kN/m ³)	变异系数 δ
1	中密的漂石夹土	15	70	0.071	31.0	0.068	24.70	0.053
2	中密的角砾土、小块石夹土	20	60	0.108	26.5	0.090	24.55	0.045
3	填石路堤	5	0		40.0	0.138	20.23	0.099
4	防冲挡墙		800		45.0		26.50	

表 2 K-S 检验结果
Table 2 K-S test results

土层	n	参数	D_n							$D_n^{0.05}$	服从分布
			对数正态分布	正态分布	均匀分布	三角形分布	指数分布	γ 分布	β 分布		
中密的漂石夹土	15	内聚力	0.26	0.12	0.78	0.56	0.41	0.38	0.67	0.34	正态
		摩擦角	0.21	0.24	0.67	0.48	0.45	0.41	0.77	0.34	对数正态
		重度	0.11	0.09	1.56	0.52	0.4	0.36	0.98	0.34	正态
中密的角砾土、小块石夹土	20	内聚力	0.28	0.22	0.68	0.61	0.35	0.33	0.86	0.29	正态
		摩擦角	0.23	0.26	0.88	0.59	0.55	0.26	0.63	0.29	对数正态
		重度	0.13	0.08	1.11	0.62	0.48	0.34	0.57	0.29	正态
填石路堤	5	摩擦角	0.47	0.45	1.13	1.68	1.79	1.56	1.88	0.56	正态
		重度	0.29	0.25	0.99	0.78	0.83	0.87	0.91	0.56	正态

5.4 计算结果及分析

因为区内为 VIII 度抗震设防区, 地震加速度 a 选取为 $0.2g$ 。基于 K-S 检验的参数分布下, 分别用 LHS 法和 M-C 法对该边坡水位在 840.85 m 和 851.50 m 以及天然状态下和地震作用下分别进行可靠性分析, 并对比了计算的结果, 见表 3。

由计算结果可知, 在天然状态各个工况下路基边坡的稳定性较好, 水位上升后在地震作用下, 安全系数降低较大, 破坏概率显著增大, 安全系数大于 1, 但破坏概率已达到 35.45%。采用不同的计算方法时, M-C 法在 2 000 次模拟后达到收敛, LHS 法在 500 次模拟后达到收敛, M-C 法模拟 500 次和 2 000 次得到的破坏概率相差 1.65%, 而 LHS 法间得到的破坏概率相差较小, 为 0.15%, LHS 法模拟 500 次的结果接近 M-C 法模拟 2 000 次的结果, LHS 法计算结果的收敛性好, 说明 LHS 法具有估值稳定的优点, 较少的抽样就能反映变量分布特征的样本, 在效果上有显著的改善。对比参数基于传统的假设服从正态分布和基于 K-S 检验的分布计算的结果得知, 参数基于 K-S 检验的计算结果安全系数、破坏概率大于基于传统的假设, 可靠指标小于基于传统的假设, 由于 K-S 检验结果除传统的正态分布以外, 只有对数正态分布, 故可知, 对于破坏概率, 对数正态分布 > 正态分布; 对于安全系数, 对数正态分布 > 正态分布; 可靠指标: 对数正态分布 < 正态分布。

表 3 计算结果
Table 3 Computation results

计算方法	模拟次数/次	高程/m	工况	传统的假设参数			基于 K-S 检验的参数分布		
				F_S	$p_f/\%$	β	F_S	$p_f/\%$	β
M-C 法	500	840.85	天然状态	2.007	0.00	3.175	2.013	0.00	2.884
			地震作用	1.316	4.00	1.535	1.320	4.60	1.403
		851.50	天然状态	2.159	0.00	3.638	2.163	0.00	3.333
			地震作用	1.077	32.60	0.515	1.080	34.80	0.482
M-C 法	2 000	840.85	天然状态	2.014	0.00	2.909	2.019	0.00	2.712
			地震作用	1.321	6.75	1.417	1.323	6.25	1.326
		851.50	天然状态	2.165	0.00	3.347	2.167	0.00	3.113
			地震作用	1.080	33.15	0.490	1.083	35.10	0.470
LHS 法	500	840.85	天然状态	2.013	0.00	2.857	2.018	0.00	2.720
			地震作用	1.320	6.20	1.389	1.322	5.20	1.325
		851.50	天然状态	2.163	0.00	3.260	2.165	0.00	3.110
			地震作用	1.079	34.00	0.480	1.080	36.20	0.468
LHS 法	2 000	840.85	天然状态	2.013	0.00	2.869	2.019	0.00	2.698
			地震作用	1.320	6.75	1.395	1.323	5.35	1.358
		851.50	天然状态	2.163	0.00	2.288	2.168	0.00	3.221
			地震作用	1.079	33.60	0.483	1.084	35.45	0.471

注: F_S 为由概率分析得到的安全系数的均值安全系数, p_f 为破坏概率, β 为可靠指标。

6 结 论

(1) 边坡可靠性分析能够合理、定量地考虑边坡稳定性中一些变量的不确定性因素, 将破坏概率

(可靠指标) 和安全系数相结合, 可更好地评价边坡稳定性, 得到更有意义的分析结果。

(2) 对原始数据采用 K-S 检验法进行假设验证, 确定参数变量的分布类型, 克服了传统意义上人为假设其分布的误差, 为 LHS 抽样提供了理论上的支持。

(3) 采用 LHS 法进行抽样, 将变量的概率分布函数等分成 N 个互不重叠的子区间, 在每个子区间内分别进行独立的等概率抽样, 避免 M-C 法大量反复的抽样工作, 并且估值稳定, 有效地提高边坡可靠性分析的模拟效率。

(4) 在工程实例中发现, 在地震作用下, 安全系数大于 1, 但破坏概率已达到 35.45%, 说明该路基边坡仍有失稳的可能。

参 考 文 献

- [1] 祝玉学. 边坡可靠性分析[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1993.
- [2] 王家臣. 边坡工程随机分析原理[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1996.
- [3] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
- [4] 罗文强, 黄润秋, 张倬元. 斜坡稳定性概率分析的理论与应用[M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 2003.
- [5] 尹小涛, 王水林. 基于可靠度理论的滑坡稳定性及其影响因素分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(6): 1551—1556.
YIN Xiao-tao, WANG Shui-lin. Stability and its influential factors analysis of landslides based on reliability theory[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(6): 1551—1556.
- [6] 万越, 吕震宙, 袁修开. 基于 Latin 方抽样和修正的 Latin 方抽样的可靠性灵敏度估计及其方差分析[J]. 机械强度, 2008, 30(6): 927—934.
WAN Yue, LÜ Zhen-zhou, YUAN Xiu-kai. Latin hypercube sampling and update Latin hypercube sampling method for reliability sensitivity and its variance analysis[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2008, 30(6): 927—934.
- [7] MCKAY M D, BECKMAN R J, CONOVER W J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code[J]. *Technometrics (American Statistical Association)*, 1979, 21(2): 239—245.
- [8] IMAN R L, HELTON J C, CAMPBELL J E. An approach to sensitivity analysis of computer models, Part 1. Introduction: input variable selection and preliminary variable assessment[J]. *Journal of Quality Technology*, 1981, 13(3): 174—183.
- [9] IMAN R L, DAVENPORT J M, ZIEGLER D K. Latin hypercube sampling (program user's guide)[R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1980.
- [10] 吴振君. 土体参数空间变异性模拟和土坡可靠度分析方法应用研究[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2009.